80

الزمرة التناظرية S_n حيث n عدد طبيعي ≥ 2

تعريف:

إن S_n ترمز لمجموعة كل التقابلات من $\{1,2,\dots,n\}$ إلى $\{1,2,\dots,n\}$

$$\left(\text{أي } f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\} \text{ تقابل}\right) \Leftrightarrow \emptyset \neq S_n$$

$$\text{id} \qquad f(x)=x$$

وتزود S_n بقانون تشكيل داخلي هو تركيب التطبيقات $\circ$:

$$f: A \to B \quad , \quad g: B \to C$$

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

f يليه g نعرف $g\circ f: A \to C$

$$g\circ f(x) = g(f(x))$$

- إن $(S_n, \circ)$ زمرة لأن $\circ$ تجميعي و $id \in S_n$ العنصر الحيادي
ولكل عنصر $f \in S_n$ نظيره هو $f^{-1} \in S_n$

$$f\circ f^{-1} = id$$

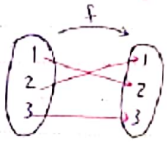
$$f^{-1}\circ f = id$$

81

$|S_n| = n!$ ندعو S_n بزمرة التباديل و

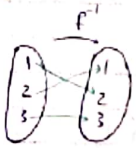
مثال:

$(S_3, \circ)$ زمرة التباديل S_3:

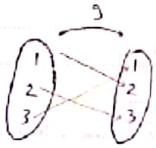


$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (1\ 2)$$

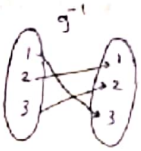
هذا التطبيق يبادل 1 و 2



$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (1\ 2)$$



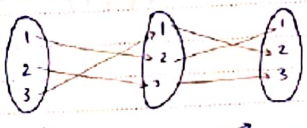
$$(1\ 2\ 3)$$



$$(1\ 3\ 2)$$

82

- لنحسب $f\circ g$:



$f\circ g$

$1 \to 1 \quad , \quad 2 \to 3 \quad , \quad 3 \to 2$

$$f\circ g = (1\ 2)\circ(1\ 2\ 3)$$

$$= (2\ 3)$$

- لنحسب $f\circ f^{-1}$

$$(1\ 2)\circ(1\ 2) = id$$

كذلك

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = id \quad , \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = (2\ 3) \right.$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = (1\ 2\ 3) \quad , \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = (1\ 2)$$

83

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = (1\ 3\ 2) \quad , \quad \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = (1\ 3)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

84

① مثال: في S_4 أوجد الشكل النظامي للعنصر ثم احسب مرتبته $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

② في S_6 أوجد الناتج ما يلي

$(1\ 3\ 5\ 2) \circ (4\ 3\ 1\ 5) \circ (2\ 6) \circ (1\ 3\ 4)$

حل 1

$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3\ 4)$

$a^1 \neq id$

$a^2 = (1\ 2)(3\ 4)(1\ 2)(3\ 4)$
$= id$

إذاً a من المرتبة 2

① → 1 → 2 → 2 → ①
② → 2 → 1 → 1 → ②
③ → 4 → 4 → 3 → ③
④ → 3 → 3 → 4 → ④

85

حل 2:

1 → 3 → 3 → 1 → 3

2 → 2 → 6 → 6 → 6

3 → 4 → 4 → 3 → 5

4 → 1 → 1 → 5 → 2

5 → 5 → 5 → 4 → 4

6 → 6 → 2 → 2 → 1

$c = (1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$

★ = احسب مرتبة c:

• $c^1 \neq id$

• $c^2 = (1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)(1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$
$= (1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6) \neq id$

86

$c^3 = (1\ 5\ 2)(3\ 4\ 6)(1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$

$= (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)$

• $c^4 = (1\ 4)(2\ 3)(5\ 6)(1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$

$= (1\ 2\ 5)(3\ 6\ 4)$

• $c^5 = (1\ 2\ 5)(3\ 6\ 4)(1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$

$= (1\ 6\ 2\ 4\ 5\ 3)$

• $c^6 = (1\ 6\ 2\ 4\ 5\ 3)(1\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6)$

$= id$

إذاً مرتبة c هي 6

ملاحظة: أوجد جميع عناصر S_4 مكتوبة بالشكل النظامي.

87

إيجاد مقلوب عنصر $f \in S_n$

1 - $(g_1 \circ g_2)^{-1} = g_2^{-1} \circ g_1^{-1}$

2 - $(a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, a_m)^{-1} = (a_m, a_{m-1}, \dots, a_2, a_1)$

مثال

$\left((1\ 2\ 5)(3\ 6\ 4)\right)^{-1} = (4\ 6\ 3)(5\ 2\ 1)$

انتهت المحاضرة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner